École Normale Supérieure de Rennes

2022-2023

Lecture dirigée

Quelques méthodes classiques de résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires

Ce rapport s'inscrit dans le cadre des lectures dirigées de l'ENS Rennes qui consistent en une introduction à la recherche supervisée par un enseignant ou doctorant de l'école et de l'IRMAR.
Nous remercions ainsi Hugo EULRY pour son accompagnement dans cet exercice, sa pédagogie, sa patience et le temps qu'il nous a consacré.

Sous la tutelle de
EULRY Hugo

BERGEAULT Dimitri
LECOQ Raphaël

Motivations

Lors de la résolution d'équations différentielles, il est courant d'arriver à l'équation

$$Ax = b, A \in S_n(\mathbb{R}), b, x \in \mathbb{R}^n$$

d'inconnue x.
Pour la résoudre, on pose et on cherche à minimiser l'application à valeurs réelles

$$x \in \mathbb{R}^n \to \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

Cela revient à chercher un point x_0 tel que la dérivée de cette fonction s'annule.
La reformulation de ce problème avec cette fonction à valeurs réelles facilite son étude car elle remplace l'étude de $x \to Ax - b$ qui est à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Cependant, cette équation ne permet de représenter que des systèmes linéaires finis d'équations. L'équation de Laplace, pilier de la théorie des ondes électromagnétiques, n'est cependant pas décrite par un système fini d'équations et la dérivée par rapport à une seule variable.
Nous cherchons alors à poser une théorie permettant de s'intéresser à des équations qui couplent les dérivées partielles :
Prenons Ω un ouvert borné de R^n

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega} \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, f est une fonction donc la régularité reste à discuter et φ est continue sur $\partial\Omega$ et Δu est le laplacien de u.

Des cas simples existent :

- si f est au moins continue et φ constante, il suffit moralement "juste" d'intégrer 2 fois f pour obtenir u sur $\overline{\Omega}$ puis de traduire des conditions nulles au bord et d'y ajouter φ.

Dans la suite, nous pourrons toujours prendre $\varphi = 0$ sans perdre de généralité.

Mais les équations comme celle de Laplace, où φ est non constante demandent déjà une nouvelle théorie :

- si f une fonction constante, que l'on peut prendre nulle:

On pose de la même manière que précedemment une fonction réelle à minimiser :
$J(v) := \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$ et $K_0 := \{v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), v = \varphi \text{ sur } \partial\Omega\}$.
Par une approche variationnelle similaire au cas linéaire, on suppose l'existence de $u \in K_0$ qui minimise J alors en prenant $w \in \mathcal{C}^2_c(\Omega)$ alors pour tout $t > 0$ on a $u \pm tw \in K_0$ (car Ω étant ouvert et w à support borné, w est nulle au bord).

Alors

$$\begin{aligned}
J(u) \leq J(u \pm tw) &= \int_\Omega |\nabla(u(x) \pm tw(x))|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u(x) \pm t\nabla w(x)|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \pm 2t\nabla u(x) \cdot \nabla w(x) + t^2 \nabla w(x) dx, \text{ où } z \cdot y \text{ est le produit scalaire dans } \mathbb{R}^n \\
&= J(u) \pm 2t \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx + t^2 J(w) \\
\iff \forall t > 0, \pm \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx \geq tJ(w)
\end{aligned}$$

On fait $t \to 0$ et on obtient $\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dx = 0$
Ensuite, par la formule de Green :
$0 = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) = -\int_\Omega \Delta u \cdot w$ et ce pour toute fonction test $w \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$ donc $\Delta u = 0$.
Cette formule d'intégration par partie sera admise dans la suite.

Mais le vrai frein se situe sur l'existence de u :
Si dans le cas linéaire, il est possible de se ramener à des compacts, ce n'est plus le cas dans la version avec Δu :
nous avons besoin de nouveaux objets permettant de retrouver les propriétés d'existence données par la compacité sur K_0.

De plus, la régularité de f ne doit pas se limiter aux cas réguliers $\mathcal{C}^p$ afin de pouvoir décrire le plus généralement possible les équations de cette forme : les équations qui régissent le monde physique et mathématique sont loin d'être continues !

De manière informelle, on a tout de même envie d'intégrer f deux fois et d'en déduire u.
De ce fait, il faut au moins pouvoir donner un sens à $\int f$, il est donc naturel de travailler dans $\mathbf{L}^p$.
$\mathbf{L}^2$ est un très bon candidat car l'inversion de Fourier permet de relier aisément u à f.
De ce fait, nous aurons aussi besoin de pouvoir donner un sens à Δu car u dépend d'une fonction $\mathbf{L}^2$ donc n'est pas dérivable au sens analytique.

Nous avons donc besoin d'une notion de dérivée qui donne un sens à $\Delta(\cdot)$, de construire un espace qui assure l'existence d'un u tel que $-\Delta u = f \in \mathbf{L}^2$ tout en gardant la condition $u = \varphi$ au bord.

Contents

Part I
Espace de Sobolev

On se restreint dans toute la suite à Ω ouvert borné $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d$.

1 Définition et propriétés sur $\Omega \subset \mathbb{R}$

Nous allons nous familiariser avec un premier espace privilégié pour la résolution des EDP dans le cadre simple de $\mathbb{R}$.
On suppose $\Omega =]0;1[$

1.1 Espaces de Hilbert et $\mathbf{L}^2$

On rappelle succintement les définitions principales des espaces de Hilbert.

Définition 1.1. *Espace pré-hilbertien*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire.
Alors E munit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ noté $(E,\langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Définition 1.2. *Espace de Hilbert*
Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien $(H,\langle \cdot, \cdot \rangle)$ complet pour la norme $|| \cdot ||$ canoniquement associée à son produit scalaire : $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition 1.3. *Base de Hilbert*
Soit $(H,\langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.

Une famille $F = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de Hilbert si :

- *F est une famille orthogonale de H i.e*

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

  où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

- *F est totale :*

$$\overline{Vect(F)} \text{ est dense dans } H$$

Propriété 1.3.1. *: Tout espace de Hilbert séparable sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une base de Hilbert*

Définition 1.4. $\mathbf{L}^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$
On note $H = \mathbf{L}^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$ *l'ensemble des fonctions* 2π*-périodiques de carré localement intégrable munit du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

et de la norme associée

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

Alors $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est un espace de Hilbert.*

Dans le cas d'une fonction $f \in \mathbf{L}^2(]0;1[)$, on pose l'homothétie $\varphi : t \in]0;1[\longmapsto f(2\pi t)$ et on périodise f avec $\Psi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(t - \lfloor t \rfloor)$.
f peut ainsi être vue comme une fonction $g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$.
Réciproquement on peut écrire $f(t) = g_{|]0;1[}(\frac{t}{2\pi})$, $\forall t \in]0;1[$.

Dans la suite, on identifiera $\mathbf{L}^2(\mathbb{T},\mathbb{C})$ à $\mathbf{L}^2(]0;1[)$.

Propriété 1.4.1. *Bases hilbertiennes de* $\mathbf{L}^2(]0;1[)$
1) $(e^{2i\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de* $\mathbf{L}^2(]0;1[)$.
2) $(\sqrt{2}sin(2\pi nt))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* $\mathbf{L}^2(]0;1[)$.

Proof. 1) Connu
2) Soit $f \in \mathbf{L}^2(]0;1[)$. Soit $t \in]0;1[$. On a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{2i\pi nt} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)cos(2\pi nt) + i\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)sin(2\pi nt).$$

En voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}^2$-espace vectoriel, on a alors l'identification

$$(e^{2i\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}} \cong (\sqrt{2}cos(2\pi nt))_{n\in\mathbb{Z}} \cup (\sqrt{2}sin(2\pi nt))_{n\in\mathbb{Z}}$$

Donc $(cos(2\pi nt))_{n\in\mathbb{Z}} \cup (sin(2\pi nt))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(]0;1[)$.
On note $f(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_k cos(2\pi kt) + b_k sin(2\pi kt)$.
On peut écrire : $f(t) = a_0 + \sum\limits_{k\geq 1}(a_k + a_{-k})cos(2\pi kt) + (b_k - b_{-k})sin(2\pi kt)$ et se ramener à $k \in \mathbb{N}$
On prolonge f en une fonction impaire sur]-1;1[.
Comme f impaire, tous les a_k sont nuls.
Donc $f(t) = \sum\limits_{n\geq 1} b_k sin(2\pi kt)$ dans $\mathbf{L}^2(]-1;1[)$ donc dans $\mathbf{L}^2(]0;1[)$.
Donc la famille $(\sqrt{2}sin(2\pi nt)_{n\geq 1}$ est totale.
Le caractère orthonormé découle directement du produit scalaire.

$\square$

1.2 Espaces de Sobolev en dimension 1

Dans la suite, on considère $(sin(2\pi nt))_{n\geq 1}$ la base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(]0;1[)$ et on notera $f(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)sin(2\pi kt)$.
On omet volontairement le $\sqrt{2}$ car le caractère normé n'intervient pas dans la suite.

Définition 1.5. *L'espace de Dirichlet en dimension 1 :* $H^s_D(]0;1[)$
Soit $s \geq 0$. *On note :*

$$H^s_D(]0;1[) = \{f \in \mathbf{L}^2(]0;1[)/\sum_{k\geq 1} k^{2s}|c_k(f)|^2 < +\infty\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^s_D(]0;1[)} = \sum_{k\geq 1} k^{2s} c_k(f)\overline{c_k(g)}.$$

et on admet la complétude de cet espace.
On appelle cet espace : l'espace de Sobolev.

Remarque 1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est bien hermitien, défini et positif.*

Remarque 2. $H^0_D(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$

Définition 1.6. *Opérateur compact :*

Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, *on dit que* T *est un opérateur compact de* E *dans* F *si* $T\left(\overline{\mathcal{B}}_E\right)$ *est relativement compact dans* F, *c'est-à-dire que* T *envoie tout borné de* E *sur un relativement compact de* F.

On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'espace vectoriel des opérateurs compacts de E dans F.

Propriété 1.6.1. *Si* $s > s'$ *alors* $H^s_D(]0;1[)$ *s'injecte de façon compacte dans* $H^{s'}_D(]0;1[)]$.

Proof. Soit $s > s'$. Soit $f \in H^s_D(]0;1[)$.
La suite $(k^{2s'}|c_k(f)|^2)_{k\geq 1}$ est à terme positive, tout est licite. On a :

$$\begin{aligned}\sum_k k^{2s'}|c_k(f)|^2 &= \sum_k k^{2s}\cdot k^{2(s'-s)}|c_k(f)|^2 \\ &\leq \sum_k k^{2s}|c_k(f)|^2 \text{ car } s' < s \\ &< +\infty\end{aligned}$$

On en déduit que $H^s_D(]0;1[)) \subset H^{s'}_D(]0;1[)$ $\|$ et $\|f\|_{H^s_D} \geq \|f\|_{H^{s'}_D}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $H^s_D(]0;1[)$. Alors $(f_n)_n$ est bornée dans $H^{s'}_D(]0;1[)$.
Notons $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum\limits_{k\geq 1} c_k(f_n)e_k$ avec $e_k : t \mapsto sin(2\pi kt)$.
Alors par la formule de Parseval, $\|f_n\|^2 = \sum\limits_{k\geq 1} |c_k(f_n)|^2 < +\infty$ car f_n bornée.
Donc les $c_k(f_n)$ sont bornés :
par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ et extraction diagonale, on construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les $|c_k(f_{\varphi(n)})|$ convergent.
Pour tout $k \geq 1$, on note $a_k := \lim\limits_{n\to+\infty} c_k(f_{\varphi(n)})$. Soit $K \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k\geq 1}^{K} k^{2s}|a_k|^2} &\leq \sqrt{\sum_{k\geq 1}^{K} k^{2s}|a_k - c_k(f_{\varphi(n)})|^2 + \sum_{k\geq 1}^{K} k^{2s}|c_k(f_{\varphi(n)})|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k\geq 1}^{K} k^{2s}|a_k - c_k(f_{\varphi(n)})|^2 + \|f\|_{H^{s'}}}\end{aligned}$$

Pour n assez grand, le premier terme est plus petit que 1. Comme $(f_n)_n$ est bornée dans $H^{s'}_D(]0;1[)$, $\sqrt{\sum\limits_{k\geq 1}^{K} k^{2s}|a_k|^2}$ est uniformément borné par rapport à K, donc la série converge.
La fonction $f = \sum\limits_{k\geq 1} a_k sin(2\pi n\cdot)$ existe donc dans $H^{s'}_D(]0;1[)$, et :

$$\begin{aligned}\|f - f_{\varphi(n)}\|_{H^{s'}} &= \sum_{k\geq 1} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)}) - a_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{K} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)}) - a_k|^2 + \sum_{k\geq K+1} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)}) - a_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)}) - a_k|^2 + \sum_{k\geq K+1} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)})|^2 + \sum_{k\geq K+1} k^{2s'}|a_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)})|^2 + \frac{1}{K^{2(s-s')}} \sum_{k\geq K+1} k^{2s}|c_k(f_{\varphi(n)})|^2 + \sum_{k\geq K+1} k^{2s'}|a_k|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} k^{2s'}|c_k(f_{\varphi(n)}) - a_k|^2 + \frac{1}{K^{2(s-s')}}\|f_{\varphi(n)}\|^2 + \sum_{k\geq K+1} k^{2s'}|a_k|^2\end{aligned}$$

En prenant K assez grand on rend les deux derniers termes aussi petit que l'on veut. Puis, on prend n assez grand ce qui rend le premier terme aussi petit que l'on veut à son tour.
Finalement, $f_{\varphi(n)}$ converge vers f dans $H^{s'}_D$

□

Définition 1.7. *Dérivée au sens faible*
Soit $f \in \mathbf{L}^2(]0;1[)$.
On dit que f *admet une dérivée au sens faible s'il existe* $g \in \mathbf{L}^2(]0;1[)$ *telle que* $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ *on a :*

$$\int_{]0;1[} f\varphi' = -\int_{]0;1[} g\varphi$$

On note alors $f' := g$.

On admet le résultat suivant vrai uniquement en dimension 1:

Propriété 1.7.1. *Pour tout* $s > \frac{1}{2}, H_D^s(]0;1[)$ *s'injecte de façon compacte dans* $\mathcal{C}^0([0;1])$ *et* $f(0) = f(1) = 0, \forall f \in H_D^s(]0;1[)$

Cela permet de justifier une définition de $C^k, k \in \mathbb{N}$:

Définition 1.8. *Classe* $\mathcal{C}^k$ *:*
Soit $s > \frac{1}{2}$.
$f \in H_D^s$ *est dite de classe* $\mathcal{C}^k$ *si* $\forall j \in [\![0; k-1]\!]$, $f^{(j)}$ *admet une dérivée faible dans* $H_D^{s_j}$ *avec* $s_j > 1/2$.

Remarque 3. $s_j > \frac{1}{2}$ *car ainsi par injection compacte on peut identifier la dérivée faible à une fonction continue.*

Remarque 4. *On peut montrer que si* $f \in H_D^s$ *avec* $s > k + 1/2$ *alors* $f \in \mathcal{C}^k$.

Propriété 1.8.1. *Soit* $f \in \mathbf{L}^2$ *tel que* $f' \in \mathbf{L}^2$ *alors* $f \in \mathcal{C}^0([0;1])$.

En conséquence :
$H_D^1(]0;1[) = H_0^1(]0;1[) := \{f \in \mathbf{L}^2(]0;1[), f' \in \mathbf{L}^2(]0;1[)$ *et* $f(0) = f(1) = 0\}$.

On admet ce résultat car la démonstration ne se généralise pas dans la suite. On retiendra seulement la remarque suviante :

Remarque 5. *Nous observons ainsi que l'espace de Dirichlet est un parfait espace pour la résolution du problème car il permet de mettre de côté la notion de bord sans en perdre les implications tout en donnant un sens à (1) donné dans les motivations par l'existence des dérivées faibles (donc d'une notion de gradient faible) si* s *est assez grand.*

1.3 Normes équivalentes

Définition 1.9. *L'espace de Sobolev $H^1(]0;1[)$ est :*

$$H^1(]0;1[) := \{f \in \mathbf{L}^2(]0;1[) \parallel f \parallel^2_{H^1(\Omega)} = \parallel f \parallel^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \parallel f' \parallel^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq +\infty\}$$

muni du produits scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega fg + f'g'$$

Propriété 1.9.1. *La norme $\parallel . \parallel_{H^1(\Omega)}$ et $\parallel . \parallel_{H^1_D(]0;1[)}$ sont équivalentes où $\parallel . \parallel_{H^1_D(]0;1[)}$ est la norme induite par le produit scalaire défini dans la Définition 1.5.*

Corollaire 1.3.1. *L'espace de Dirichlet est une partie complète de l'espace de Sobolev : c'est l'ensemble des fonctions de cet espace qui ont une valeur nulle au bord sur $H^1_D(]0;1[)$.*

On va montrer que l'espace de Sobolev admet les mêmes propriétés que l'espace de Dirichlet ! C'est donc le premier espace privilégié à étudier avant de s'intéresser aux conditions au bord.

2 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

Dans la suite, on travaillera avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ au sens des cartes locales.
En dimension 1, nous avons posé la notion de dérivée partielle et remarqué que l'ensemble de Dirichlet permettait d'assurer leur existence.
C'est important pour donner un sens à notre équation.
Nous devons donc construire un espace en dimension supérieure qui admet le même comportement.

2.1 Définition générale

Définition 2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert on pose $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty_c(\Omega)$.*

Remarque 6. *Ces fonctions et toutes leurs dérivées s'annulent forcément sur $\partial\Omega$.*

Théorème 2.1. *Densité :*

$$\mathcal{D}(\Omega) \text{ est dense dans } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Théorème 2.2. *(admis)*
Soit $f \in \mathbf{L}^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ telle que $\int_\Omega f\phi = 0, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors :

$$f = 0 \text{ presque partout }.$$

C'est un résultat classique que nous admettrons.

Corollaire 2.1.1. *Pour tout* $p \in [1,\infty]$ *si* $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *telle que* $\int_\Omega f\phi = 0$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *alors* $f = 0$ *presque partout, car* $\mathbf{L}^p \subset \mathbf{L}^1_{loc}$.

Définition 2.2. *Soit* $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *on dit que* f *admet une i-dérivée partielle faible dans* $\mathbf{L}^2$ *ssi*

$$\textit{Pour } i \in [\![1,d]\!], \exists v_i \in L^2(\Omega) \textit{ tel que } -\int_\Omega f\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega v_i\phi, \textit{ et on note } \frac{\partial f}{\partial x_i} := v_i \textit{ ou } \partial_i f := v_i.$$

Définition 2.3. *Gradient faible :*
Soit $u \in \mathbf{L}^2$ *qui admet une dérivée partielle faible selon toutes les directions. On définit le gradient faible de u :* $\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_d u \end{pmatrix}$

Propriété 2.3.1. *Si existence, les derivées partielles faibles sont uniques dans* $\mathbf{L}^2$.

Proof. Soit $f \in L^2(\Omega)$ v_i et w_i des derivées partielles faibles de f par rapport a la variable x_i, alors

$$\int_\Omega v_i\phi = \int_\Omega w_i\phi \text{ alors } \int_\Omega (v_i - w_i)\phi = 0 \text{ , } \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

d'après le Lemme 1.3.1 $v_i = w_i$ p.p donc $v_i = w_i$ dans $\mathbf{L}^2$

□

Prenons $u \in \mathbf{L}^2$ et on suppose que ce qui suit est licite.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$.
On pose :

$$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_d.$$
$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1} u}{\partial x_1^{\alpha_1}} ... \frac{\partial^{\alpha_d} u}{\partial x_d^{\alpha_d}}$$

Définition 2.4. *Espace de Sobolev sur* $\Omega \in \mathbb{R}^d$
On pose

$$H^m(\Omega) := \{u \in \mathbf{L}^2 / \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| < m, \partial^\alpha u \in \mathbf{L}^2\}$$

C'est l'espace de Sobolev sur $\mathbf{L}^2$.

On travaillera dans la suite avec $H^1(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega) / \forall i, \partial_i u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$.
Dans cet espace, toutes les dérivées partielles dont on a besoin existent !
Nous donnerons un sens à $\Delta(\cdot)$ au sens des distributions plus tard.
Nous allons d'abord montrer que cet espace admet une structure particulière, qui sera primordiale par la suite pour l'existence de solution, puis nous gérerons la condition au bord.

2.2 Structure de Hilbert

L'équivalence des normes établis dans (1.3) reste vraie en dimension supérieure. La norme des espaces de Dirichlet découle même plutôt de la définition de la norme des Sobolev.
$H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire suivant :

$$\forall (f,g) \in (H^1(\Omega))^2, \langle f,g\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f\cdot g + \nabla f \cdot \nabla g$$

Remarque 7. *$\cdot$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 2.3. *Complétude de $H^1(\Omega)$:*
$H^1(\Omega)$ muni du produits scalaire $\langle .,.\rangle_{H^1(\Omega)}$ est complet.

Proof. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy $H^1(\Omega)$. Soit $\epsilon \leq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p,q \geq n_0$

$$\| f_p - f_q \|^2_{H^1(\Omega)} \leq \epsilon^2$$

c'est à dire

$$\| f_p - f_q \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{d} \| \frac{\partial f_p}{\partial x_i} - \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \epsilon^2$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall i \in [1,d]$, $(\frac{\partial f_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et donc converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on note $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ et $\forall i \in [1,d]$, $\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_i$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
Il s'agit maintenant de prouver que pour tout $i \in [1,d]$ la derivé faible de f par rapport à x_i est v_i et est donc dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $i \in [1,d]$:

$$|\int_\Omega f\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \int_\Omega f_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}| \leq \| f_n - f \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

De la même manière : $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \phi \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = \int_\Omega \phi v_i$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega \phi\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = -\int_\Omega f_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

Donc par unicité de la limite :$\int_\Omega f\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \phi v_i$

Donc v_i est bien la derivé partiels faible de f par rapport à x_i

De plus on a bien:

$$\| f_n - f \|^2_{H^1(\Omega)} = \| f_n - f \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{d} \| \frac{\partial f_n}{\partial x_i} - v_i \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Définition 2.5. *On définit* $H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ *qui est un fermé inclu dans* $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ *est donc un Hilbert.*
$H^1_0(\Omega)$ *correspond aux fonctions* $f \in H^1(\Omega)$ *telles que* $f = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

Remarque 8. *On n'a ainsi pas besoin de donner un sens à* f *sur* $\partial\Omega$ *car* Ω *ouvert et* f *limite de fonctions à support compact sur* Ω. $H^1_0(\Omega)$ *se charge justement de donner un sens aux conditions au bord.*

2.3 Théorème de Poincaré

Théorème 2.4. *Inegalité de Poincaré :*
Soit $f \in H^1_0(\Omega)$, *alors il existe une constante* $C > 0$ *tel que :*

$$\| f \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C \| \nabla f \|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

Proof. Quitte à translater Ω et le sachant borné, on peut supposer $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1} \times [0; a]$ avec $a > 0$ (sinon, des valeurs absolues apparaissent naturellement).
Sans perte de généralité, on peut supposer $\|\partial_d u\|_2 \neq 0$ (permutation de base).
Soit $x \in \Omega$, on note $x = (x', x_d)$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $x_d \in [0; a]$:

$$\partial_d |u(x', x_d)|^2 = (\partial_d) u(x', x_d)^2 = 2 \cdot \partial_d u(x', x_d) u(x', x_d)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= |u(x', x_d)|^2 \\ &= 2 \int_0^{x_d} (\partial_d u)(x', t) u(x', t) dt \text{ par ce qui précède.} \\ &\leq 2 \int_0^{a} |(\partial_d u)(x', t)| |u(x', t)|^1 dt \text{ inégalité triangulaire et changement des bornes.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } \|u\|^2_{\mathbf{L}^2} &= \iint_\Omega |u(x', x_d)|^2 dx' dx_d \text{ avec } x' \text{ et } x_d \text{ comme précédemment.} \\ &\leq \iint_\Omega 2 \int_0^a |u(x', t)| |(\partial_d u)(x', t)| dt dx_d dx' \\ &= 2a \iint_\Omega |u(x', t)| |(\partial_d u)(x', t)| dt dx' \text{ par Fubini.} \\ &= 2a \iint_\Omega |u(x', x_d)| |(\partial_d u)(x', x_d)| dx' dx_d \\ &\leq 2a \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|(\partial_2 u)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \text{ par Cauchy-Schwarz.} \\ &\leq 2a \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Finalement : $\|u\|_{\mathbf{L}^2} \leq 2a \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} = C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}$ avec $C > 0$. □

Propriété 2.5.1. *On pose :*

$$\forall (f, g) \in H^1_0(\Omega)^2, \langle f, g \rangle_{H^1_0(\Omega)} := \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g$$

Alors sur $H^1_0(\Omega)$ *la norme issue de* $\langle ., . \rangle_{H^1_0(\Omega)}$ *est équivalente a celle issue de* $\langle ., . \rangle_{H^1(\Omega)}$

Proof. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|v\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C^2 \|\nabla v\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \text{ par Poincaré.}$$
$$\Leftrightarrow \int_a^b |v|^2 + |\nabla v|^2 \leq (C^2+1) \int_a^b |\nabla v|^2.$$

Et $\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \int_a^b |v|^2 + |\nabla v|^2$, car $\cdot$ étant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$: les carrés sont positifs.

□

Cette équivalence de normes permet de ne considérer que les normes sur le gradient et facilite l'application des théorèmes de représentation qui permettront d'assurer l'existence des solutions.

2.4 Theorème de Rellich

A partir de maintenant on se place dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe C^1

Théorème 2.5. *Rellich*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors l'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

On retrouve le résultat démontré en dimension 1.
Afin de démontrez ce théorème nous avons besoin de pouvoir caractériser les relativement compact des espaces $\mathbf{L}^p$.

Théorème 2.6. *(Riesz-Fréchet-Kolmogorov)*
Caractérisation des relativement compacts de $\mathbf{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)$:
Soit $A \subset \mathbf{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, A est relativement compacte dans $\mathbf{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ si et seulement si :

- *A est bornée dans $\mathbf{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)$*
- $\int_{|x|>R} |f|^p dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *uniformément en $f \in A$*
- $\tau_a f \underset{|a|\to 0}{\longrightarrow} f$ *uniformément en $f \in A$*

Il s'agit d'un resultat classique d'analyse fonctionnelle que nous admettons.

Lemme 2.4.1. *Soient $S_1 \in \mathcal{L}(G,H), S_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{K}(F,G)$, Alors $\widetilde{T} = S_1 \circ T \circ S_2 \in \mathcal{K}(E,H)$.*

Proof. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ la boule unité ouverte de E, S_2 étant continue, $S_2(\mathcal{B})$ est un borné de F. T étant compact de F dans G, $T \circ S_2(\mathcal{B})$ est relativement compact dans G : $\overline{T \circ S_2(\mathcal{B})}$ est compact dans G. Par continuité de S_1, la compacité est préservée et $\bar{T}(\mathcal{B})$ est compact dans H. □

Lemme 2.4.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in H_0^1(\Omega)$, notons $\tilde{f}$ le prolongement par 0 de f sur Ω^c. Alors l'application*

$$\Psi : f \in H_0^1(\Omega) \mapsto \tilde{f} \in H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

est une isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Proof. On raisonne par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ en montrant que Ψ est une isométrie de $\left(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(H^1\left(\mathbb{R}^d\right), \|\cdot\|_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)}\right)$

Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega), \tilde{f} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\operatorname{supp}(\tilde{f}) \subsetneq \Omega$. Donc f (respectivement ∇f) et $\tilde{f}$ (respectivement $\nabla \tilde{f}$) coincident sur Ω et $\tilde{f}$ et $\nabla \tilde{f}$ sont nuls à l'extérieur de Ω. Ainsi

$$\begin{aligned}
\|\Psi(f)\|_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)} &= \|\tilde{f}\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)} + \|\nabla \tilde{f}\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \\
&= \|\tilde{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&= \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&= \|f\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc Ψ est bien une isométrie de $\left(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(H^1\left(\mathbb{R}^d\right), \|\cdot\|_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)}\right)$ et la complétude de $\left(H^1\left(\mathbb{R}^d\right), \|\cdot\|_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)}\right)$ permet de prolonger Ψ en une unique isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ munis des normes habituelles. $\square$

Lemme 2.4.3.

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^d) \text{ et } h \in \mathbb{R}^d, \|\tau_h u - u\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq |h| \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)}$$

Proof. Par densité de $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ dans $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, il suffit de montrer le résultat pour $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Soit donc $h \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ quelconques :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}^d, u(x-h) - u(x) = -\int_0^1 \nabla u(x-th) \cdot h dt \\
&\quad \Rightarrow |u(x-h) - u(x)|^2 \leq |h|^2 \int_0^1 |\nabla u(x-th)|^2 dt \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz.}
\end{aligned}$$

et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, $\|\tau_h u - u\|^2_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-h) - u(x)|^2 dx \leq |h|^2 \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)}$ par Fubini-Tonelli. $\square$

On a maintenant tout le matériel nécessaire pour établir le théorème de Rellich, un résultat fondamental pour la suite :

Proof. (Rellich)
Pour montrer la compacité de $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, il suffit de montrer que l'injection $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \widetilde{u} \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ est compacte, on conclut ensuite par composition avec l'application linéaire continue $u \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right) \mapsto u_{|\Omega} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Notons $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}_{H_0^1(\Omega)}$ la boule unité fermée de $H_0^1(\Omega)$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\widetilde{f}, f \in \mathcal{B}\}$. Alors, par le lemme précédent, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{B}}_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)}$. Montrons que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est relativement compacte dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Pour ce faire on utilise la caractérisation du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov pour $p = 2$: $\widetilde{\mathcal{B}}$ est effectivement une partie bornée de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ car $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq \|\cdot\|_{H^1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ est bornée pour la norme $H^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

De plus, pour toute fonction $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ et tout $R > 0$ vérifiant $\Omega \subset \mathcal{B}(0, R)$, $\quad \int_{|x|>R} |\widetilde{f}|^2 dx = 0$ ce qui justifie le deuxième point.

Enfin, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{B}}_{H^1\left(\mathbb{R}^d\right)}$ donc $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 1$ et alors

$$\forall f \in \widetilde{\mathcal{B}}, \forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \|\tau_a f - f\|_{\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq |h| \underset{|a|\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{uniformément en } f$$

Ce qui vérifie le troisième point et justifie que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une partie relativement compacte de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ et donc que $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \widetilde{u} \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ est un opérateur compact. On conclut alors que l'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. $\square$

Remarque 9. *Le théorème de Rellich permet de démontrer l'inégalité de Poincaré sans calcul.*

Part II

Résolution d'équations aux dérivées partielles

3 Reformulation du problème

Il s'agit ici, à l'aide des espaces de Sobolev et des définitions que l'on a posées, de pouvoir enfin donner un sens au problème (1). De manière générale, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on considère $f(\cdot, u) \in \mathbf{L}^2$ une fonction qui dépend de u.
Si $f(\cdot, u) = f$ le problème sera dit linéaire. Il sera non linéaire sinon.

D'abord, un résultat général d'intégration par partie que nous avons utilisé plus tôt et qu'il convient de préciser :

Théorème 3.1. *Formule de Green (admis).*
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in H^1(\Omega)$. Alors :

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \psi = -\int_\Omega \varphi \cdot \nabla\psi$$

Remarque 10. *Cette formule est valable pour des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc pour des fonctions limites de suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est le cas des fonctions dans $H_0^1(\Omega)$!*

Soit $q \in \mathbf{L}^\infty, f \in \mathbf{L}^2$.
On ne donnera pas un sens précis à la notion de solution forte (vraie point par point). Formellement, on admet la possibilité qu'il existe une fonction u et un espace qui donne un sens à :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x)u(x) = f(x, u) & \forall x \in \overline{\Omega} \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

où Δ est le Laplacien au sens où on l'entend en différentiabilité.
Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. On intègre la première ligne de la façon suivante :

$$\int_\Omega (-\Delta u + qu) \cdot v = \int_\Omega f \cdot v \tag{3}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega qu \cdot v = \int_\Omega f \cdot v \text{ par Green} \tag{4}$$

Une solution qui réaliserait (2) en tout point réalise ainsi (4) en "moyenne" pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Comme nous avons donné un sens à $\nabla(\cdot)$ mais pas à $\Delta(\cdot)$ (car nous voulons rester le plus général possible), on utilisera à présent systématiquement la formulation faible !

Remarque 11. *Une solution faible ne vérifie à priori pas (2).*
On s'est tout de suite restreint à H_0^1 car la formulation forte nécessite des outils trop complexes.

Une solution dite faible est une solution qui réalise (4) pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Il suffit alors de chercher les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant (4) pour toute fonction test.

Remarque 12. *Les fonctions test sont prise dans $H_0^1(\Omega)$ car il contient $\mathcal{D}(\Omega)$ et, contrairement à $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est un Hilbert.*

Définition 3.1. *Solution faible :*
u est une solution faible de (2) si u vérifie :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega qu \cdot v = \int_\Omega f \cdot v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{5}$$

On pourra ainsi donner un sens à $\Delta(\cdot)$ dans le cas où $q \equiv 0$ et $\Delta(u)$ sera alors l'opérateur linéaire continu qui à u solution faible associe $f(\cdot, u)$. On pourra aussi poser son inverse qui à $f(\cdot,\cdot)$ associe u.
Il faut alors montrer que cette fameuse solution faible existe (sinon, on a fait tout ça pour rien !).

4 Théorèmes de représentation

Soit$(H, \langle .,. \rangle)$ un Hilbert

Théorème 4.1. *Représentation de Riesz:*
Soit ℓ une forme linéaire continue de $H \to \mathbb{R}$, alors il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H \ , \ \ell(v) = \langle u, v \rangle, \ \text{de plus : } \|u\|_H = \|\ell\|_{H'}$$

Théorème vu en ENVCD.

Corollaire 4.0.1. *Représentation des formes bilinéaires:*
Soit a une forme bilinéaire continue de $H^2 \to \mathbb{R}$, alors il existe une unique application linéaire continue A de $H \to H$ telle que:

$$\forall (u, v) \in H^2 \ , \ a(u, v) = \langle A(u), v \rangle \ \text{de plus : } \|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \|a\|_{\mathcal{L}(H \times H, \mathbb{R})}$$

Proof. On fixe $u \in H$ alors $\ell_u(v) = a(u, v)$ est une forme linéaire continue le théorème de représentation de Riez nous donne donc l'existance d'un unique $A(u) \in H$ tel que $a(u, v) = \langle A(u), v \rangle$.

Ainsi ont obtiens l'unicité d'une tel application, il reste à demontrer la linéarité et le continuité.
Linéarité:
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_1, u_2, v) \in H^3$,

$$\langle \lambda A(u_1) + A(u_2), v \rangle = \lambda \langle A(u_1), v \rangle + \langle A(u_2), v \rangle = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v) = a(\lambda u_1 + u_2, v) = \langle A(\lambda u_1 + u_2), v \rangle.$$

Ainsi $\forall v \in H$, $\langle \lambda A(u_1) + A(u_2) - A(\lambda u_1 + u_2), v\rangle = 0$ donc en choisissant $v = \lambda A(u_1) + A(u_2) - A(\lambda u_1 + u_2)$ on obtiens bien $A(\lambda u_1 + u_2) = \lambda A(u_1) + A(u_2)$
Continuité : soit $u \in H$,

$$\| A(u) \|^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = a(u, A(u)) \leq \|a\|_{\mathcal{L}(H\times H,\mathbb{R})} \| u \| \| A(u) \|$$

□

Théorème 4.2. *Lax-Milgram : Soit a une forme bilinéaire continue de $H^2 \to \mathbb{R}$ coercive, et ℓ forme linéaire continue alors :*
Il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $\ell(v) = a(u, v)$ et $\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell\|_{\mathcal{L}(H',\mathbb{R})}$

Proof. a(.,.) est une forme bilinéaire continue de $H^2 \to \mathbb{R}$ coercive donc :

$$\exists \alpha, M > 0 \text{ tel que } \forall (u, v) \in H^2 \text{ , } |a(u, v)| \leq M \| u \| \| v \| \text{ et } a(u, u) \geq \alpha \| u \|^2$$

D'après les 2 theorèmes de Riesz précédent :$\exists w \in H$ et $A \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\forall v \in H$, $\ell(v) = \langle w, v\rangle$ et $a(u, v) = \langle A(u), v\rangle$.
On veut donc démontrer qu'il existe $u \in H$ tel que $A(u) = w$.
Pour cela on considère $f(u) = u - \lambda(A(u) - w)$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{M}$ et on veut démontrer que f est contractante et donc qu'elle admet un point fixe:

$$\begin{aligned}
\| f(u) - f(v) \|^2 &= \| u - v - \lambda(u - v) \|^2 \\
&= \| u - v \|^2 + \lambda^2 \| A(u - v) \|^2 - 2\lambda\langle A(u - v), u - v\rangle \\
&\leq \| u - v \|^2 + \lambda^2 M^2 \| u - v \|^2 - 2\lambda a(u - v, u - v) \\
&\leq (1 + \lambda^2 M^2 - 2\lambda\alpha) \| u - v \|^2
\end{aligned}$$

Or$(1+\lambda^2M^2-2\lambda\alpha) > 0$ pour que la dernière inégalité ait un sens et $(1+\lambda^2M^2-2\lambda\alpha) < 1$ grace à la définition de de λ, le théorème de points fixe de Picard permet de conclure pour l'existence et l'unicité du point fixe. Soit u cet unique points fixe alors :

$$\alpha\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle A(u), u\rangle \leq \|u\|\|w\| \text{ et d'après Riesz } \|w\|_H = \|\ell\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})}$$

$$\text{D'ou } \|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|\ell\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{R})}$$

□

Remarque 13. *Il existe une seconde démonstration qui n'utilise pas de théorème de représentation des fonctions bilinéaires et qui fait mieux apparaître les hypothèses :*

Proof. Soit $\ell \in H'$ où H' est le dual de H.
Par théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que $\ell(v) = \langle f, v \rangle$.

Soit $u \in H$: $a(u, \cdot) \in H'$ est continue par hypothèse.
Par théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur $f_u \in H$ tel que pour tout $v \in H$, $a(u, v) = \langle f_u, v \rangle$.

On pose $A : u \in H \longmapsto f_u \in H$.
Montrons qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $Au = f$. Nous allons même montrer A bijective. A est linéaire OK.
A est continue :
$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leq C\|Au\|\|u\|$ car $a(\cdot, \cdot)$ continue. Donc $\|Au\| \leq C\|u\|$.

$\text{Ker}(A) = \{0\}$:
Soit $u \in \text{Ker } A$, alors $0 = \langle Au, u \rangle = a(u, u) \geq C\|u\|^2$. Donc $u = 0$.

Im A est fermé :
on utilise le caractère complet de H, la coercivité et la continuité de a.

L'orthogonal de Im A est l'ensembe $\{0\}$ par coercivité de a.

A est surjective :
Son image est fermée et d'orthognale nulle, donc Im A dense dans H hilbert. Par caractérisation des espace de Hilbert : Im A $= H$.

Donc A bijective. Donc $\ell(v) = a(A^{-1}v, v)$.

Le contrôle de la norme de la solution s'effectue comme dans la démo précédente. □

Remarque 14. *Comme précisé dans la partie 2.1 les théorèmes de représentation s'appliquent sur des Hilbert. Quelle chance, l'espace de Sobolev en est un !*

Remarque 15. *En réalité, l'espace de Sobolev est construit de manière à être un Hilbert pour pouvoir appliquer ces théorèmes.*

Ces théorèmes de représentation nous assurent l'existence de solutions faibles dans le cas linéaire. Nous allons le montrer dans la suite.

5 Cas linéaire

5.1 Problème de Sturm-Liouville

On s'intéresse au problème suivant en dimension 1 :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{dans }]0;1[. \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

où $p \in \mathcal{C}^1([0;1])$, $q \in \mathcal{C}([0;1])$ et $f \in \mathbf{L}^2(]0;1[)$ sont donnés avec $p(x) \geq \alpha > 0$ et $q \geq 0$.
On pose

$$\begin{array}{rl} a(\cdot,\cdot): & H_0^1(]0;1[)^2 \longmapsto \mathbf{R} \\ & (u,v) \longmapsto \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 quv \end{array}$$

et

$$\forall v \in H_0^1(]0;1[), \ell(v) = \int_0^1 fv$$

Alors

$$(6) \iff \begin{cases} u, v \in H_0^1 \\ a(u,v) = \ell(v) & \text{dans }]0;1[. \end{cases} \tag{7}$$

Pour $u, v \in H_0^1(]0;1[)$, par Cauchy-Schwarz on a

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2}\|v\|_{\mathbf{L}^2}$$

et

$$|a(u,v)| \leq \|p\|_\infty \|u'\|_{\mathbf{L}^2}\|v\|_{\mathbf{L}^2} + \|q\|_\infty \|u\|_{\mathbf{L}^2}\|v\|_{\mathbf{L}^2} \leq A\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

Donc a et ℓ sont continues sur H_0^1. De plus :

$$a(u,u) = \int_0^1 p(u')^2 + \int_0^1 qu^2 \geq \alpha\|u'\|_{\mathbf{L}^2} \geq C\alpha\|u\|_{H_0^1} \text{ par inégalité de Poincaré.}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on a donc existence et unicité d'une fonction $u \in H_0^1$ solution du problème.

Remarque 16. *Ce problème est très facile à généraliser en dimension supérieure :*

$$\begin{cases} -\nabla(p\nabla u) + qu = f & \textit{dans } \Omega. \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Les fonctions $a(u,v)$ et $\ell(v)$ sont les mêmes et les calculs aussi. Il y a donc existence et unicité d'une solution faible.

Remarque 17. *En notant que $u' = \frac{1}{p}pu' \in H_0^1$, on note que $u \in H^2(]0;1[)$ et donc que u admet un Laplacien au sens de la différentiabilité.*
On peut alors montrer que la solution u est une solution forte !

Trouver des solutions faibles, en plus de permettre de travailler avec une équation qui n'avait avant pas de solutions, peut ainsi permettre de résoudre totalement le problème. Ici, cela dépend fortement de la dimension.

5.2 Problème du Laplacien

On se place dans le cas $p = 1$, $q = 0$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v$$

On pose $\ell(v) = \int_\Omega f \cdot v$ et $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.
ℓ et $a(\cdot,\cdot)$ sont continues dans H_0^1 et a est le produit scalaire associé à H_0^1.

$$\Rightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega), \langle u, v\rangle_{H_0^1} = \langle f, v\rangle_{\mathbf{L}^2}$$

Le théorème de représentation de Riesz assure alors l'existence et l'unicité d'une solution faible dans H_0^1, ainsi qu'un contrôle sur la norme de la solution : $\|u\|_{H_0^1}\| \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2}$.
On a démontré l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Laplace. Génial !

On peut aussi définir :

$$\begin{array}{cccl} -\Delta^{-1}: & \mathbf{L}^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ & f & \mapsto & -\Delta^{-1}f \quad \text{l'unique solution de (8)} \end{array}$$

$(-\Delta^{-1})$ est un opérateur continu linéaire et bijectif.

Proof. Le caractère linéaire est direct.
Le caractère continu provient du contrôle de la norme dans le théorème de représentation de Riesz.

□

Remarque 18. *Cet opérateur définit une application continue de $\mathbf{L}^2$ dans H_1^0 et comme, par Rellich, il y a une injection compacte de H_1^0 dans $\mathbf{L}^2$, on a définit un opérateur compact de $\mathbf{L}^2$ dans lui-même.*

5.3 Opérateur non symétrique

La formulation faible se basant sur l'opérateur Δ étant symétrique, la fonction $a(u,v)$ définie était en réalité un produit scalaire. Un travail plus long et fastidieux avec le théorème de Riesz aurait ainsi pu permettre de conclure.

Nous allons donc étudier un cas où il n'y a plus de symétrie.
Prenons $a_{i,j} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, on définit l'opérateur

$$\mathcal{L} : u \in H_0^1 \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq d} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u).$$

On suppose cet opérateur elliptique (ou coercif) au sens où :

$$\forall u \in H_0^1, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(u)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$$

Le problème étudié est alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Et sa formulation au sens faible s'écrit :

$$\exists u \in H_0^1, \forall v \in H_0^1, \int_\Omega \sum_{1\leq i,j\leq d} (a_{i,j}\partial_j u)\cdot(\partial_i v) = \int_\Omega f\cdot v$$

On pose alors $L(v) = \int_\Omega f \cdot v$ et $a(u,v) = \int_\Omega \sum\limits_{1\leq i,j\leq d} (a_{i,j}\partial_j u)\cdot(\partial_i v)$.
$a(\cdot,\cdot)$ est facilement bilinéaire mais rien n'assure sa symétrie : on montre son caractère coercif continu sur H_0^1 :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \sum_{i,j=1}^{d} \|a_{i,j}\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_\Omega |\partial_j u||\partial_i v| \text{ inégalité triangulaire.} \\ &\leq C\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}\|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2} \text{ par Cauchy-Schwarz.} \\ &= C\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \text{ par définition de la norme dans } H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(\partial_j u)(\partial_i u) \\ &\geq \int_\Omega \alpha|\nabla u|^2 \text{ par caractère elliptique de } \mathcal{L}. \\ &= \alpha\|u\|^2_{H_1^0(\Omega)} \text{ d'où le caractère coercif.} \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'une solution.

Remarque 19. *Le théorème de représentation de Lax-Milgram permet de conclure pour le cas linéaire même non symétrique, mais ne permet pas de conclure dans le cas non linéaire. En réalité, dans le cas non linéaire, on peut assurer l'existence mais plus difficilement l'unicité d'une solution. C'est ce que nous allons voir dans la suite.*

6 Cas non linéaire

Théorème 6.1. *Points fixe de Schauder(admis):*
Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet au moins un point fixe.

Lemme 6.0.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$. Pour tout couple de fonctions mesurables u_1 et u_2 sur Ω, si $u_1 \sim u_2$ alors $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$.*

Proof. Notons d'abord que si une fonction u est mesurable alors $f \circ u$ l'est aussi, puisque f est continue. Supposons que $u_1 \sim u_2$, i.e., $u_1 = u_2$ presque partout dans Ω. Il existe donc un ensemble négligeable N tel que si $x \notin N, u_1(x) = u_2(x)$, d'où également $f(u_1(x)) = f(u_2(x))$, c'est-à-dire $f \circ u_1 \sim f \circ u_2$. □

En d'autres termes, on vient de voir que l'application $u \mapsto f \circ u$ passe au quotient par la relation d'égalité presque partout.

Lemme 6.0.2. *Soit X un espace topologique et x_n une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x. Alors la suite entière x_n converge vers x.*

Proof. On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite ne converge pas vers x. Il existe donc un voisinage V de x et une sous-suite x_{n_m} telle que $x_{n_m} \notin V$ pour tout m. Extrayons de cette sous-suite une nouvelle sous-suite $x_{n_{m_l}}$ qui converge vers x quand $l \to +\infty$. Il existe donc un l_0 tel que pour tout $l \geq l_0, x_{n_{ml}} \in V$, ce qui constitue une contradiction. □

Théorème 6.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $|f(t)| \leq a$. On définit pour toute classe d'équivalence de fonctions mesurables sur Ω la classe d'équivalence $f(u) = f \circ u$ comme au lemme précédent. Alors l'application $\tilde{f} : u \mapsto f \circ u$ envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et est continue.*

Proof. Si $u \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega |f(u)|^2 dx \leq a^2 \operatorname{mes}^2 \Omega < +\infty,$$

donc $\tilde{f}(u) \in L^2(\Omega)$.

Montrons que l'application ainsi définie est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Soit u_n une suite convergente dans $L^2(\Omega)$ vers une limite u. Soit $u_{n'}$ une sous-suite de u_n. Extrayons une nouvelle sous-suite $u_{n''}$ qui converge presque partout vers u d'après Riesz-Fisher.

$|f(u_{n''}(x)) - f(u(x))|^2 \to 0$ presque partout car f continue et $|f(u_{n''}) - f(u)|^2 \leq 4a^2$. Le second membre est une fonction de $L^1(\Omega)$ qui ne dépend pas de n''. Par convergence dominée $\int_\Omega |f(u_{n''}) - f(u)|^2 dx \to 0$, i.e. $\tilde{f}(u_{n''}) \to \tilde{f}(u)$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous avons montré que de toute sous-suite $\tilde{f}(u_{n'})$, nous pouvons extraire une sous-suite qui converge vers $\tilde{f}(u)$ dans $L^2(\Omega)$. L'unicité de cette limite implique que c'est la suite entière $\tilde{f}(u_n)$ qui converge d'après le lemme précédent. $\square$

Théorème 6.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Il existe au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u = f(u)$ au sens faible.*

Proof. On a espace $E = H_0^1(\Omega)$ et on pose $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$. Alors $T : E \to E$ est continue. En effet, elle est composée d'applications continues :

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{injection} & & \tilde{f} & & (-\Delta)^{-1} & \\ H_0^1(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ v & \mapsto & v & \mapsto & f(v) & \mapsto & T(v) \end{array}$$

L'injection est compacte par le théorème de Rellich , donc par compositions d'applications continues et compacte T est un operateur compact.

Pour appliquer le théorème de Schauder, il faut encore choisir un convexe. Nous prenons ici $C = \left\{ v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \right\}$ où M est une constante à choisir.
Nous allons choisir la constante M pour que $T(C) \subset C$. Il s'agit d'un problème d'estimation de $T(v)$. $T(v)$ est solution du problème variationnel :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla T(v) \cdot \nabla w dx = \int_\Omega f(v) w dx.$$

Prenant $w = T(v)$ dans l'équation précédente, il vient:

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega f(v) T(v) dx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_\Omega |T(v)| dx,$$

puisque $|f(v)T(v)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |T(v)|$. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons que

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/2} \|T(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C_Ω telle que pour tout z dans $H_0^1(\Omega), \|z\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}$. Comme $T(v) \in H_0^1(\Omega)$, nous obtenons donc, pour tout v dans E,

$$\|\nabla T(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/2}$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, il suffit donc de prendre $M = C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/2}$, Or T est un opérateur compact continu donc T(C) est relactivement compact car C borné. Toutes les hypothèse du théorème de Schauder sont satisfaites d'ou le résultat.

$\square$

On conclut ainsi la construction des espaces de Sobolev pour la résolution d'équations au dérivées partielles dans certains cas simples, linéaire ou non linéaire.

References

[KAV] O. KAVIAN, Introduction à la théorie des points critiques et application aux problèmes elliptiques, 1993

[FOU] R. JOLY, Séries de Fourier, espaces de Sobolev et EDP, 2010

[LED] H. Le Dret, Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, 2012,

[BRE] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Dunod, 2005

[NOU] I. Nourdin, Agrégation de mathématique épreuve orale, 2e édition, Dunod, 2006